PROBLEMAS OLIMPIADA
Sesión de preparación 26-01-2018

Fase Local LIV Olimpiada Matemática Española

1. Sean $a \geq 1,\ b \geq 1$, números naturales cuyo máximo común divisor y mínimo común múltiplo designamos por D y M respectivamente. Demostrar que
$$D^2 + M^2 \geq a^2 + b^2.$$

2. ¿De cuántas maneras se puede escribir 111 como suma de tres números enteros en progresión geométrica?

3. Encontrar las funciones reales f, de variable real, que satisfacen la ecuación funcional
$$f(x + f(x + y)) = f(2x) + y,$$
cualesquiera sean $x,\ y$ reales.

4. Determinar los números reales $x > 1$ para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes
$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \qquad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \qquad x^4 - 1$$

5. Sea n un número natural. Probar que si la última cifra de 7^n es 3, entonces la penúltima es 4.

6. Sea AD la mediana de un triángulo ABC tal que $\angle ADB = 45^{\text{o}}$ y $\angle ACB = 30^{\text{o}}$. Determinar el valor de $\angle BAD$.

7. Probar que
   a) La suma de las distancias desde un punto de la superfcie de la esfera inscrita en un cubo de $\mathbb{R}^3$ a todas las caras del mismo,no depende del punto elegido.
   b) Misma cuestión anterior para la suma de los cuadrados de las distancias.
   c) Misma cuestión que las anteriores para la suma de los cubos de las distancias.

8. Sean $a,\ b,\ c$ números naturales primos, distintos dos a dos. Demostrar que el número
$$(ab)^{c-1} + (bc)^{a-1} + (ca)^{b-1} - 1$$
es múltiplo del producto abc.

9. Se han coloreado 46 cuadrados unitarios de una cuadrícula $9x9$. ¿Hay en la cuadrícula alguna figura del tipo

   (no necesariamente en la orientación que muestra el dibujo) con las tres casillas coloreadas?